



# Ontwikkeling van het inzicht in afgeleides en kinematica

Gerrit Roorda  
Rijksuniversiteit Groningen



# Opbouw presentatie

- › Inleiding
- › Het onderwerp afgeleide
- › Het onderzoek
- › Resultaten
  - Kogel: Gebruikte procedures
  - De raaklijn.
  - Hoe zit het met die remweg?
  - Formules
- › Afsluiting



# Aanleiding

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

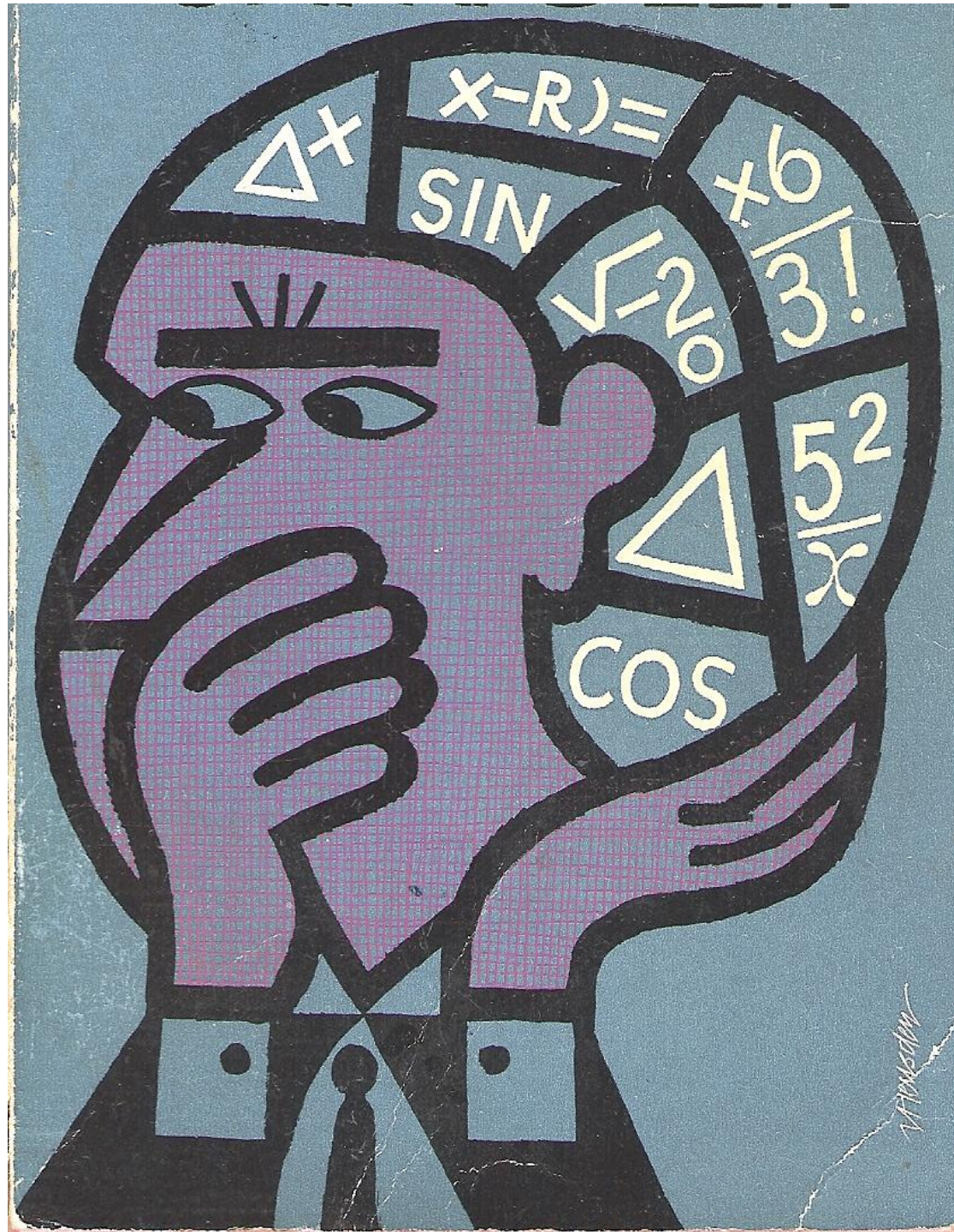
$$v(t) = v_0 + a t$$



# Inleiding

Het thema is oud:

- Natuurkunde Wiskunde Conferentie in 1975
- Vredenduin en Biezeveld in Euclides, 1979
- Van Hiele in 1985



Inleiding

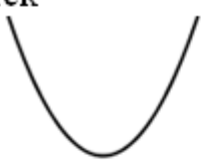





# Ontwikkeling?





# Het concept afgeleide

	Symbolisch	Grafisch	Numeriek								
<b>Laag 1</b>	De functie $f(x) = x^2$	Grafiek 	Tabel <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>4</td> </tr> </table>	x	0	1	2	y	0	1	4
x	0	1	2								
y	0	1	4								
<b>Laag 2</b>	differentiequotient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Gemiddelde helling 	Gemiddelde verandering <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td>1</td> <td>4</td> </tr> </table> $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$	x		1	2	y		1	4
x		1	2								
y		1	4								
<b>Laag 3</b>	$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ differentiaalquotient	Rico raaklijn 	Momentane verandering <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>2</td> <td>2,001</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>4</td> <td>4,004001</td> </tr> </table> $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,004001}{0,001} \approx 4$	x	2	2,001	y	4	4,004001		
x	2	2,001									
y	4	4,004001									
<b>Laag 4</b>	De afgeleide functie $f' = 2x$	Hellinggrafiek 	Tabel met afgeleide waardes <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>6</td> </tr> </table>	x	1	2	3	y	2	4	6
x	1	2	3								
y	2	4	6								



## Het concept afgeleide, vervolg

	<b>Economie</b>	<b>Natuurkunde a</b>	<b>Natuurkunde b</b>
<b>Laag 1</b>	Tk; totale kosten	$s(t)$ plaats	$v(t)$ snelheid
<b>Laag 2</b>	$\frac{\Delta [TK]}{\Delta q}$ Gem. toename vd kosten	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gemiddelde snelheid	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ gemiddelde versnelling
<b>Laag 3</b>	$\frac{d [TK]}{dq}$ voor $q = a$	$\frac{ds}{dt}$ voor $t = a$ momentane snelheid	$\frac{dv}{dt}$ voor $t = a$ momentane versnelling
<b>Laag 4</b>	MK marginale kosten	$v(t)$ snelheid	$a(t)$ versnelling





# Onderzoeksvraag

Hoe is de ontwikkeling van de kennis van leerlingen over afgeleides?



## Opzet van het onderzoek

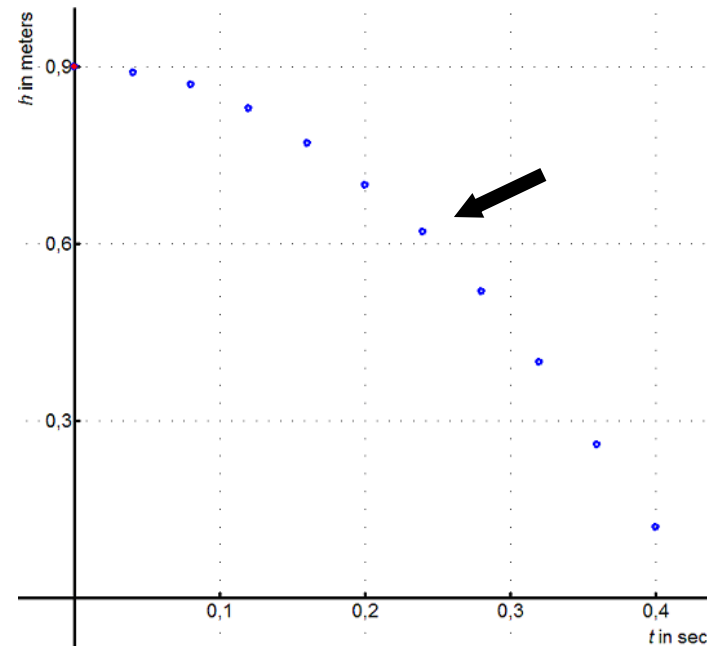
- › 10 leerlingen uit het natuurprofiel op 2 scholen
- › Opdracht gebaseerde interviews: hardop denken stimuleren
- › Fasering:
  - Interview 1: april 2006, VWO 4
  - Interview 2: nov 2006, VWO 5
  - Interview 3: mei 2007, VWO 5
  - Interview 4: nov 2007, VWO 6
- › Steeds 3 à 4 weken na de toetsweek



## Opdracht *Kogel*

Leerlingen doen metingen  
aan een vallende kogel.  
Grafiek en tabel gegeven en een  
formule  $h(t) = 0,9 - 4,9t^2$

Bij één van de punten staat een pijl.  
Hoe kunnen ze de snelheid  
berekenen op dat punt?

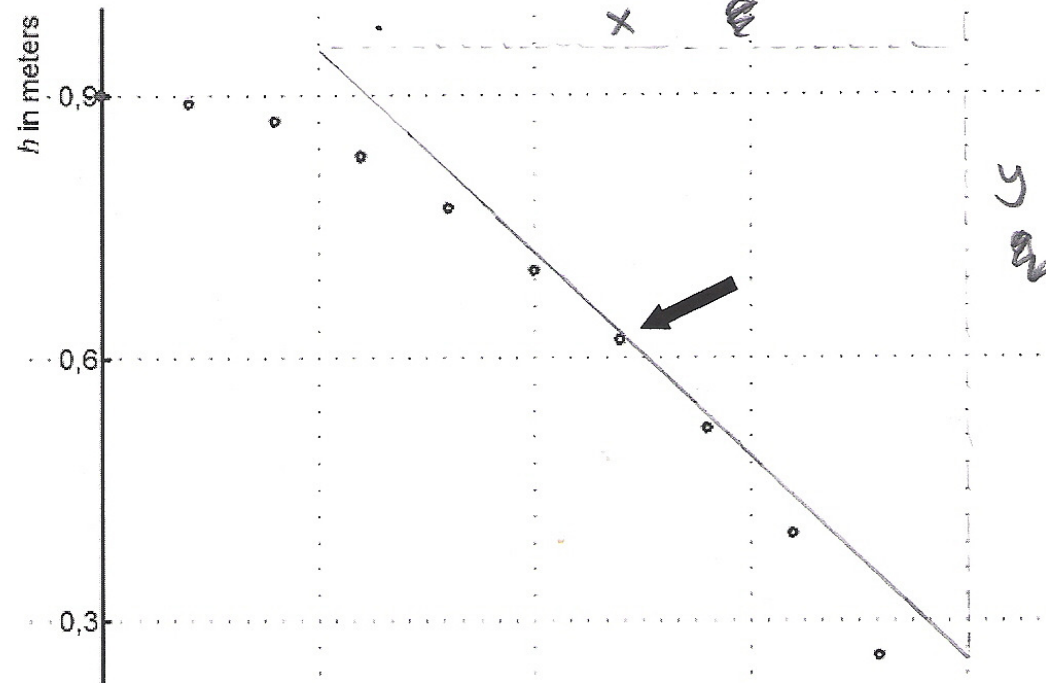


<i>tijd</i> (sec)	0	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40
<i>hoogte</i> (cm)	90	89	87	83	77	70	62	52	40	26	12



## Casper: interview 2

*“Ik zou zelf een raaklijn gaan gebruiken of anders Bij wiskunde moet je de grafiek benaderen met.. hoe heet zo’n ding.. een afgeleide.”*



$$\cancel{v = 2at + b}$$

$$\cancel{v = 9,0 \cdot 2 \cdot t + 0}$$

$$\cancel{v = 19,6 t}$$

$$\cancel{t = 0,24} \quad \cancel{v = 19,6 \cdot 0,24 = 4,704}$$



## Casper, waar komt die $v = 2at + b$ vandaan

Het berekenen van de snelheid bij een gegeven formule via het differentiequotiënt vereist meestal veel rekenwerk. Gelukkig zijn er regels waarmee je de snelheidsformule in een aantal gevallen zo kunt opschrijven.

In opgave 8 heb je ontdekt:

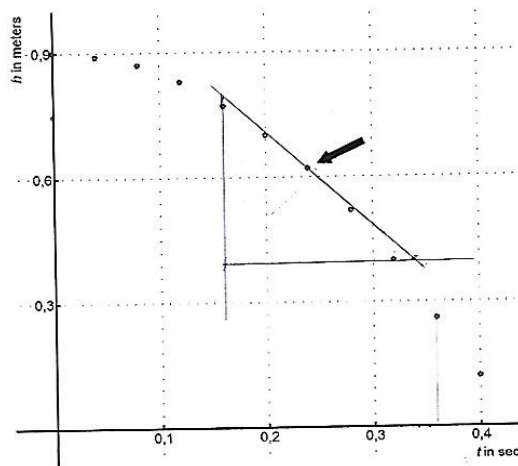
als  $s = at^2 + bt + c$  dan is  $v = 2at + b$ .

$$s = at^2 + bt + c \quad \text{geeft} \quad v = 2at + b$$



# Bob, interview 2, november vwo 5

## Gebruikte procedures



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$9,81 \cdot 0,28 = \frac{1}{2}v^2$$
$$V = \sqrt{9,81 \cdot 0,28 \cdot 2} = 5,15 \text{ m/s}$$

$$0,9 - 4,9t^2$$
$$0,9 - 4,9 \cdot 2t$$

**Bob's procedures: onzeker en onsamenhangend**



## Uitspraken van Bob in interview 2

B: *“Ja nou er waren volgens mij meerdere afgeleides manieren zeg maar om iets af te leiden. [...] Ja deze weet ik nog deze was alleen met x en erin zeg maar, volgens mij.”*

I: *“Dat snap ik niet?”*

B: *“Er was nog een andere die gebruikten ze in het boek steeds op een praktische manier zeg maar en deze gebruikten ze volgens mij.”*

I: *“Met x en?”*

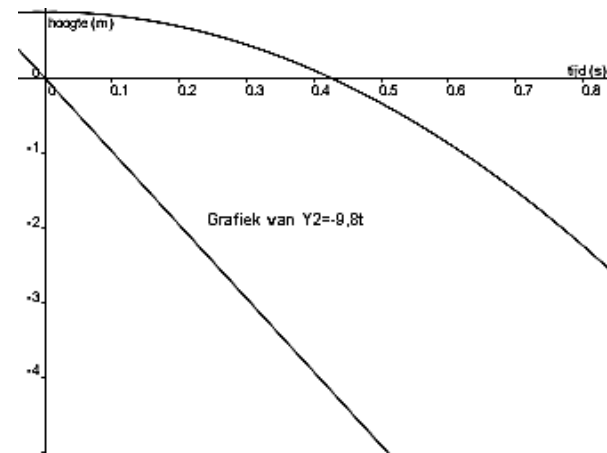
B: *“Theoretisch, [...] dus alleen maar met parabolen van niet bestaande verschijnselen zeg maar.”*



## Bob, interview 4, november vwo 6

### Gebruikte procedures

- › Raaklijnmethode
- › Afgeleide
- › Klein interval



*“En de snelheid is  $g \times t$  geloof ik. Ja [...] hier ook de afgelegde afstand is een  $\frac{1}{2} gt$  kwadraat, dat is dan ook logisch dat die afgeleide dan wel weer 9,81 is. Gewoon de versnelling keer de tijd is de snelheid.”*





## Elly interview 2, november vwo 5

### Opdracht Kogel

*“Ik herinner me dit half, half van de laatste wiskundetoets”*

Schrijft op  $v = s/t$  of  $t/s$

*“de snelheid [...] ik ben zo slecht in het onthouden van formules”*

*“ik heb het altijd over  $s$  gedeeld door  $t$  en niet over  $t$  gedeeld door  $s$ ”*



## Elly, interview 4, november VWO 6

Opdracht Kogel:

*“Ja ik heb een formule nodig waar die  $a$  in staat en volgens mij mag ik die gewoon [...]  $v = a \times t$ ”*



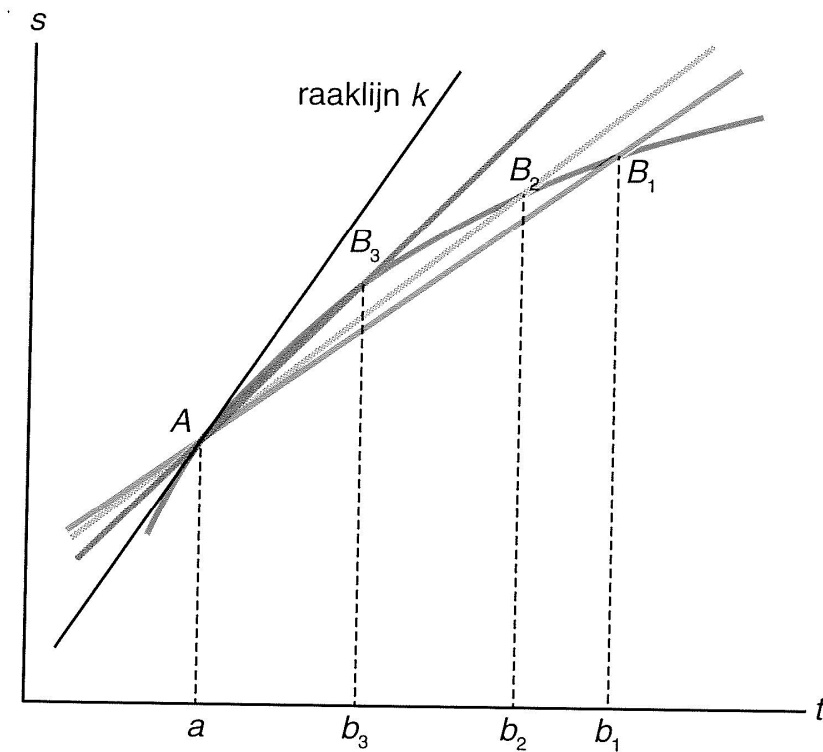
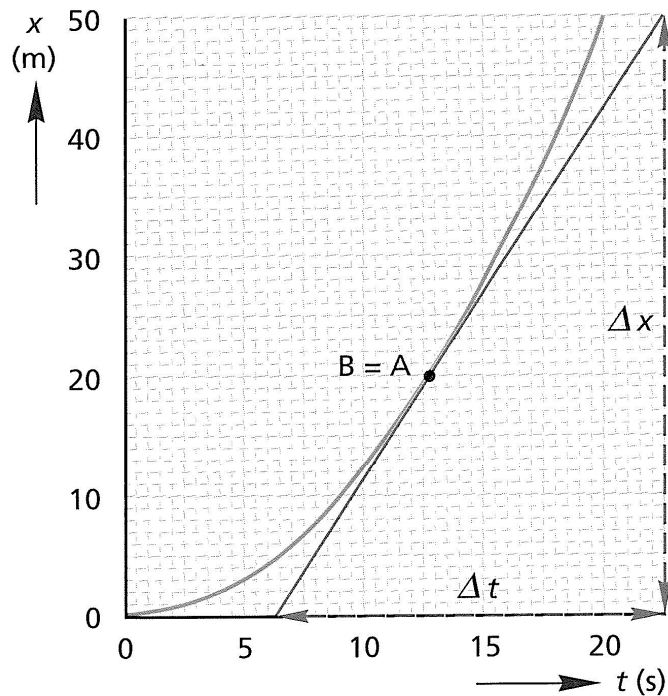
# Procedures bij de opdracht Kogel

procedure	behandeld bij	Interview 2, vwo 5, november	Interview 4, vwo 6, november
		A B C D E K M N O P	A B C D E K M N O P
Klein- intervalmethode	wi		
GRM-optie	wi		
Raaklijnmethode	na		
Symbolisch differentiëren	wi		
Natuurkunde- formules	na		

Resultaten: procedures



# Raaklijn bij natuurkunde en wiskunde





## Opdracht Remweg

De remweg van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen.

Deze remweg  $R$  in meters, is een functie van de snelheid  $v$  in km/u.

Wat betekent  $R'(80) = 1,15$ ?

- Denken (3 minuten), delen (3 minuten).

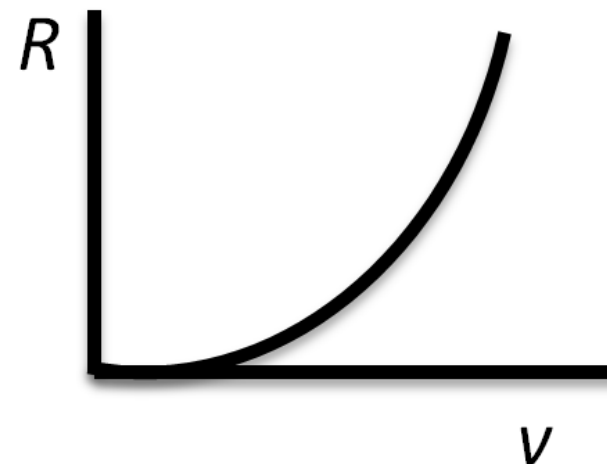


## Opdracht Remweg

De remweg van een auto is de afstand die een auto nog rijdt, nadat de bestuurder begint te remmen.

Deze remweg  $R$  in meters, is een functie van de snelheid  $v$  in km/u.

Wat betekent  $R'(80) = 1,15$ ?





## Otto, interview 4: De remweg

$s$  = afgeleide weg

$v = s' =$  snelheid

$a = s'' =$  versnelling

$s = v \cdot t$



## Wat leer ik ervan?

- › Bij veel leerlingen komt er steeds meer overzicht over het concept afgeleide. Maar vaak veel later dan wanneer iets is onderwezen.
- › De grafische representatie: belangrijk bij het leggen van relaties tussen schoolvakken.  
Verschil: raaklijn bij natuurkunde en bij wiskunde.
- › Gebruik van notaties:  $v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  of  $v = \frac{s}{t}$





## Discussie

ERB	EVB	
$s = v \times t$	$s = \frac{1}{2} a t^2$	
$v = c$	$v = a t$	
$a = 0$	$a = a$	



## Discussie

ERB	EVB	B
$s(t) = v_c \times t$	$s(t) = \frac{1}{2} a t^2$	$s(t)$
$s'(t) = v(t) = v_c$	$s'(t) = v(t) = a t$	$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$
$v'(t) = a(t) = 0$	$v'(t) = a(t) = a$	$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$



## Discussie

*If you want people to learn something, teach it to them.*

Detterman (1993)

Expliciteer en herhaal verbanden tussen schoolvakken en laat leerlingen er mee werken.



rijksuniversiteit  
groningen

13-1-2015

# Bedankt